α-WISKUNDE

Graad 11 Alpha Wiskunde
Junie Eksamen 2024

Graad 11 **Tyd: 2 ½ uur**
Eksaminator: M. Botha **Totaal: 150 punte**
Moderator: P. Marx

INSTRUKSIES EN INLIGTING

Lees die volgende instruksies aandagtig deur voordat jy die vraestel beantwoord:

1. Hierdie vraestel bestaan uit **8** bladsye en 'n antwoordblad en 2 diagramblaaie.
2. Beantwoord AL **7** vrae. *Beantwoord slegs vraag 5A **OF** vraag 5B, **nie beide nie**.*
3. Nommer die antwoorde soos die vrae genommer is.
4. Nie-programmeerbare sakrekenaars mag gebruik word, tensy anders vermeld by 'n vraag.
5. Tensy anders gespesifiseer, moet alle antwoorde, waar van toepassing, korrek tot twee desimale syfers afgerond word.
6. Dui alle noodsaaklike berekeninge, diagramme, grafieke ensovoorts wat jy gebruik het om jou antwoorde te bepaal, duidelik aan.
7. Volpunte sal nie noodwendig aan slegs antwoorde toegeken word nie.
8. Die diagramme in die vraestel is nie noodwendig volgens skaal geteken nie.
9. Alle hoeke word in **radiale** gegee. Antwoorde moet in radiale gegee word indien nodig.
10. Skryf netjies en leesbaar.
11. **Geniet dit!**

Vraag 1 – Multikeuse Vrae [20 punte]

Hierdie vraag moet **op die antwoordblad** beantwoord word.

Elke vraag het **SLEGS** een korrekte antwoord en tel twee (2) punte. Merk die korrekte antwoord met 'n **X** op die Antwoordblad.

1.1 Los op vir x, in $|x-2|=2$

(A) $x=0$

(B) geen oplossing

(C) $x=0$ of $x=4$

(D) $x \in \mathbb{R}$

1.2 $f(x)=x+2x^3-3x^4+30$. Watter van die volgende is waar?

(A) -1 is 'n nulpunt

(B) $x+2$ is 'n faktor van f

(C) x^2-4 is 'n faktor van f

(D) 2 is 'n nulpunt van f

1.3 $|2x-5|<-3$.

(A) $-1<x<1$

(B) $x<-1$ of $x>1$

(C) $x \in \mathbb{R}$

(D) Geen oplossing vir x

1.4 $K(x)=|x+4|+12$. Watter van die volgende is waar?

(A) Die knakpunt is $(4;12)$

(B) K het geen x-afsnitt(e) nie

(C) Die y-afsnit is $(0;12)$

(D) K het geen y-afsnitt(e) nie

1.5 'n Sektor met oppervlakte A, se radius word verdubbel en die hoek word halfveer. Die nuwe sektor se oppervlakte is:

(A) A

(B) $\frac{A}{2}$

(C) $2A$

(D) $4A$

1.6 Indien ons $\frac{-2x-1}{(x^2-3x)(x+1)}$, opbreek in parsiële breuke kry ons:

(A) $\frac{Ax+B}{(x^2-3x)}+\frac{\text{C}}{(x+1)}$

(B) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+1}$

(C) $\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{\text{C}}{x+1}$

(D) $\frac{A}{(x^2-3x)}+\frac{\text{B}}{(x+1)}$

1.7 Indien $x=-3-i$ ‘n nulpunt van polinoom $g(x)$ is, dan

(A) is $x-3+i$ ‘n faktor

(B) is $x-3-i$ ‘n faktor

(C) het g ten minste 3 faktore

(D) is $x+3-i$ ‘n faktor

1.8 Die inverse funksie van $h(x)=\cos(2x+1)$ is

(A) $\text{bgcos}\,(2x+1)$

(B) $\frac{bgcos(x)-1}{2}$

(C) $\text{bgcos}\,(\frac{x}{2}-1)$

(D) $\frac{bgcos(x-1)}{2}$

1.9 Hoeveel terrme is in die uitbreiding van $(x+\frac{2}{x})^6$?

(A) 7

(B) 6

(C) 8

(D) 4

1.10 Indien $P(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ dan is die nulpunt(e) van P:

(A) $x=-2$

(B) $x=2$

(C) $x=2$ en $x=-2$

(D) $x=4$

Vraag 2 - Absolute Waarde [37 punte]

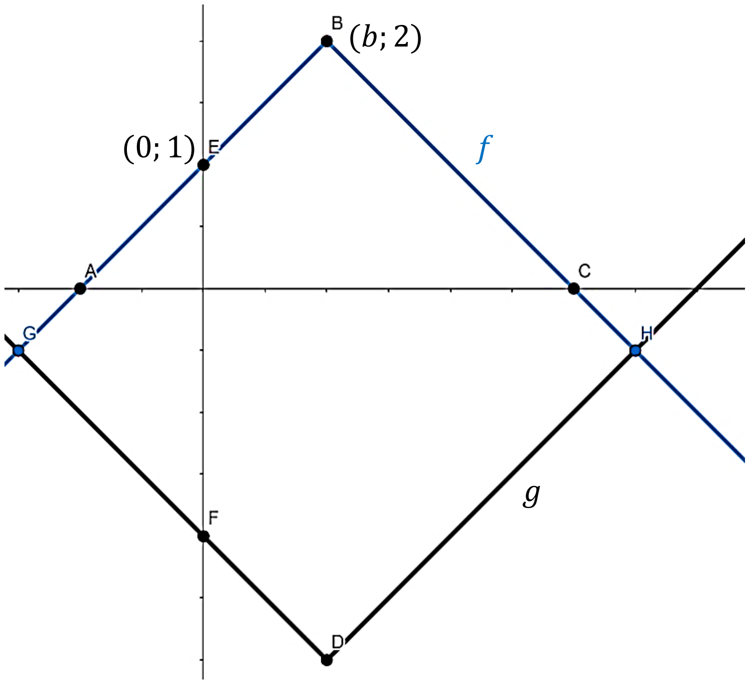
2.1 Los op vir x, $x \in \mathbb{R}$, in:

2.1.1 $|x-2| = -1$ (2)

2.1.2 $|x+3| = x$ (5)

2.1.3 $|x^2-4| = 3x$ (8)

2.2 In die diagram hieronder is die grafiek van $f(x) = -|x-b| + a$ sowel as die grafiek van $g(x) = |x-c| + d$. Die punte E $(0;1)$ en B $(b;2)$ is aangedui.



2.2.1 Bepaal (met redes) die waardes van a en b (4)

2.2.2 Indien $a = 2$ en $b = 1$ (volg nie noodwendig van 2.2.1 nie).
Bepaal die koordinate van A en C. (5)

2.2.3 Indien $g(x) = -f(x) - 1$ bepaal die koordinate van D $(c;d)$ en F. (4)

2.2.4 Vir watter waardes van x is $f(x) > 1$? (2)

2.3 Gegee $y = -|2x+1| + 2$

2.3.1 Skryf die koordinaat van die knakpunt neer. (2)

2.3.2 Skets die grafiek van $y = -|2x+1| + 2$.
Dui **alle** afsnitte met die asse en die knakpunt, en punte van belang duidelik op die skets aan. Gebruik **DIAGRAMBLAD 1** vir die skets.
(5)

Vraag 3 – Parsiële Breuke [18 punte]

3.1 Ontbind $\frac{2x^3-2x^2+x-1}{x^2(x^2+1)}$ in parsiële breuke. (10)

3.2 Pas die breuk in **KOLOM A** by die uitbreiding in **KOLOM B.**

‘n Letter *mag meer as een keer gebruik word*.

Skyf slegs die vraag nommer en letter neer, byvoorbeeld “3.2.5 G” (8)

KOLOM A		KOLOM B	
3.2.1	$\frac{3x+2}{x^3+x^2}$	**A**	$\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x+1}$
3.2.2	$\frac{3x+2}{x^4+x^2}$	**B**	$\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+1}$
3.2.3	$\frac{3x+2}{x^2(x+1)}$	**C**	$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}$
3.2.4	$\frac{3x+2}{x^3+x}$	**D**	$\frac{A}{x^2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$
		E	$\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$
		F	$\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$

Vraag 4 - Polinome [15 punte]

4.1 Indien dit gegee is dat $P(x)=x^3-2x^2+12$, $Q(x)=3x^3-4x+8$, $S(x)=x^2+2x+10$ en $R(x)=x^2+3x-4$.

Bepaal die nulpunte van die volgende polinome in $\mathbb{C}[x]$:

4.1.1 $S(x)$, indien een van die nulpunte $x=-1+3i$ is (2)

4.1.2 $K(x)=S(x).R(x)$ (4)

4.1.3 $H(x)=P(x)-Q(x)$ indien een van die faktore $x+1$ is (9)

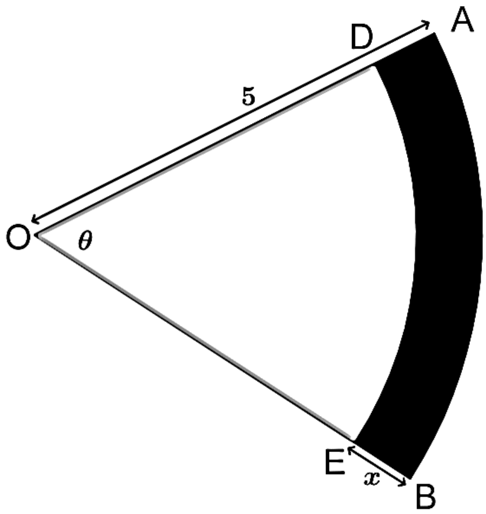
Vraag 5 [15 punte]

*DOEN SLEGS **EEN** VAN DIE VOLGENDE TWEE VRAE.*

A. Trignometrie en Radiaalmaat

Moenie die vraag doen, indien jy 5B gedoen het nie.

5. In die diagram is AOB 'n sektor, van 'n sirkel met middelpunt O met radius $r = 5\ cm$. In die sektor is $A\hat{O}B = \theta$ en EB = x. Die area DABE is gearseer.



5.1 Toon aan dat die oppervlakte van die gearseerde gedeelte, in die skets hier bo, gegee word deur die uitdrukking $\frac{x(10-x)\theta}{2}$. (5)

5.2 Indien $\theta = \frac{8}{100}$ bepaal die waarde(s) van x waarvoor die oppervlakte van die gearseerde gedeelte $1\ cm^2$ is. (4)

5.3 Indien $x = 2\ cm$ en $\theta = \frac{8}{100}$ (*hierdie is nie 'n opvolg van vraag 5.2 nie*), bepaal die omtrek van die gearseerde gedeelte. (6)

OF

B. Vektore

Moenie die vraag doen, indien jy 5A gedoen het nie.

5. Die vektore $\boldsymbol{x} = 1\boldsymbol{i} - 1\boldsymbol{j} + 1\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{y} = 1\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ en $\boldsymbol{z} = 1\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ is gegee.

5.1 Bepaal die eenheidsvektor van $\boldsymbol{z}$. (2)

5.2 Bepaal die hoek tussen $\boldsymbol{x}$ en $\boldsymbol{y}$. (5)

5.3 Bepaal die oppervlakte van die parallelogram wat gevorm word deur vektore $\boldsymbol{x}$ en $\boldsymbol{y}$ met die **determinant metode**.Watter tipe vorm is dit? (8)

Vraag 6 – Wiskundige Induksie [20 punte]

6.1 Skryf die uitbreiding van die volgende neer, met $k = 5$ en vereenvoudig volledig.

$$\sum_{i=2}^{k} (-1)^i \, (2i)$$

(7)

6.2.1 Bewys dat $\frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64} + \cdots + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$ vir alle $n \in \mathbb{N}$ deur van wiskundige induksie gebruik te maak. (11)

6.2.2 David wil bewys dat

$$|x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \text{ vir alle } n \in \mathbb{N}$$

Dit is gegee dat,

$$|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}| \qquad \textbf{(*)}$$

Voltooi die ontbrekende stappe in David se bewys hieronder in, deur die gegewe stelling (*****) en die aanname te gebruik.

David se Bewys

Vir $\boldsymbol{n = 1}$: LK=$|x_1| \leq |x_1|$ =RK
∴LK≤RK vir $n = 1$

Aanname: Aanvaar dat die stelling waar is vir $k \in \mathbb{N}$, met ander woorde:
Aanvaar dat $|x_1 + x_2 + \cdots + x_k| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_k|$

Induksie stap:
Ons wil bewys dat: $|x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1}| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_{k+1}|$
LK=$|x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1}|$
=...
=...
=...
∴LK≤RK vir $n = k + 1$

Gevolgtrekking:
Dus, deur die beginsel van wiskundige induskie is die stelling waar vir alle $n \in \mathbb{N}$.

(2)

Vraag 7 – Binomiaal Stelling, Magreeks & Inverses [25 punte]

7.1 Bepaal die koëffisiënt van x^2 in die uitbreiding van $\left(x - \frac{3}{x^3}\right)^6$. (6)

7.2 Skryf die eerste drie terme neer in die magsuitbreiding van

$$\frac{1}{2+4x}$$

sowel as die waardes van x waarvoor die uibreiding geld (6)

7.3 Indien $f(x) = 2\tan(x-1)$

7.3.1 Bepaal die inverse funksie van f (5)

7.3.2 Skets die funksies van $f^{-1}(x)$ en $|f^{-1}(x)|$ op **DIAGRAMBLAD 2**

Dui die funksies, asook **alle** afsnitte en asimptote duidelik aan.

WENK: Skets f^{-1}, en pas dan die definisie van absolute waarde toe. (8)

- EINDE VAN DIE VRAESTEL -

ALPHA WISKUNDE FORMULEBLAD

ALGEBRA:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{as} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{as} \quad x < 0 \end{cases}$$

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \cdots \ ; \text{mits } |x| < 1$$

VEKTORE:

$$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta$$

$$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

CALCULUS:

$$\int_a^b x^n \, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b$$

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$$

TRIGONOMETRIE:

In 'n sektor: $s = r\theta$ en $A = \frac{1}{2} r^2 \theta$

Identiteite: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\quad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x$ $\quad \cot^2 x + 1 = \operatorname{cosec}^2 x$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad m = \tan\theta$$

In ΔABC: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ $\qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

area ΔABC $= \frac{1}{2} ab.\sin C$

TABEL MET AFGELEIDES:

$F(x)$	$F'(x)$
ax^n	nax^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\operatorname{cosec}^2 x$
$\sec x$	$\sec x \,.\tan x$
$\operatorname{cosec} x$	$-\operatorname{cosec} x\,.\cot x$

$F(x)$	$F'(x)$
$\operatorname{bgsin} x$ $\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{bgcos} x$ $\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{bgtan} x$ $\arctan x$	$\frac{1}{x^2+1}$
$f(x).g(x)$	$f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$
$f[g(x)]$	$f'[g(x)].g'(x)$

Alpha Wiskunde Graad 11 – Junie Eksamen 2024
ANTWOORDBLAD

Naam en Van: ____

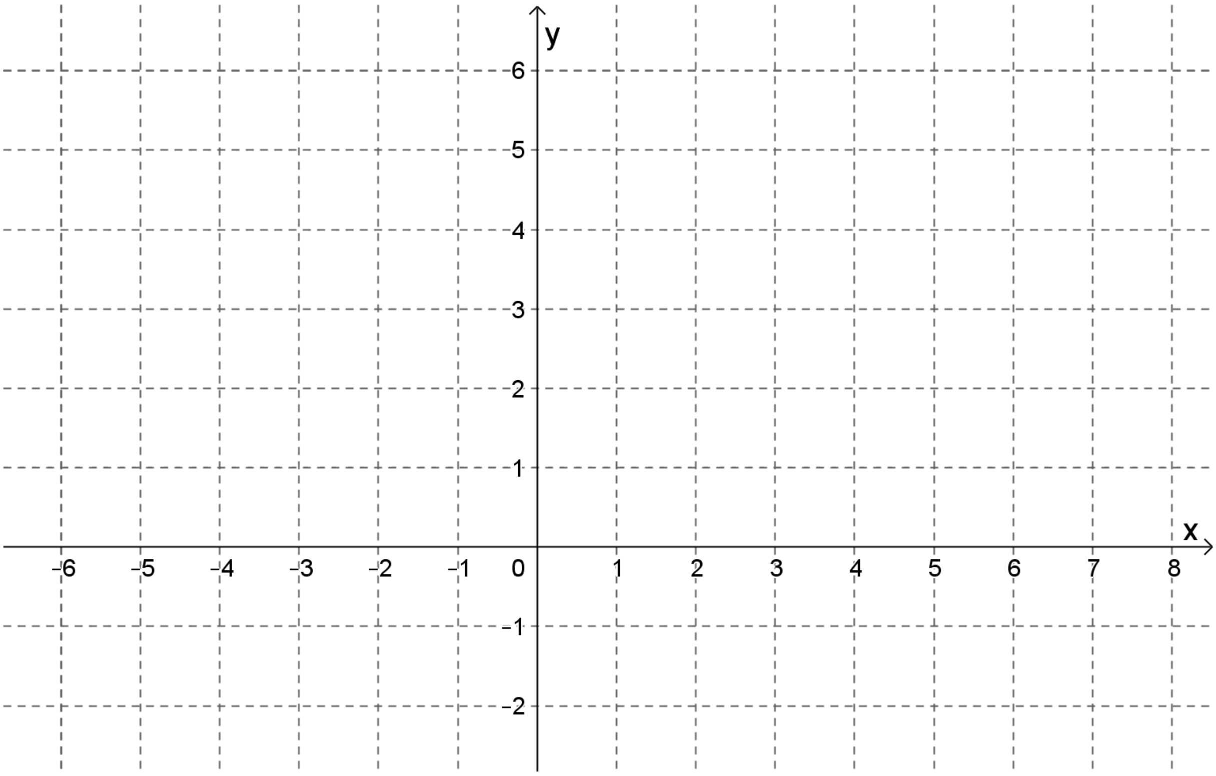
Vraag Totaal	1 [20]	2 [37]	3 [18]	4 [15]	5 [15]	6 [20]	7 [25]
Leerder punt							

TOTAAL 150

Vraag 1

1.1	A	B	C	D
1.2	A	B	C	D
1.3	A	B	C	D
1.4	A	B	C	D
1.5	A	B	C	D
1.6	A	B	C	D
1.7	A	B	C	D
1.8	A	B	C	D
1.9	A	B	C	D
1.10	A	B	C	D

DIAGRAMBLAD 1



DIAGRAMBLAD 2