

α -WISKUNDE

Alpha Wiskunde EINDEKSAMENVRAESTEL

Oktober 2024

Tyd: 3 uur

Graad 12

Totaal: 200 punte

INSTRUKSIES EN INLIGTING

Lees die volgende instruksies aandagtig deur voordat jy die vraestel beantwoord:

1. Beantwoord al 10 vrae op hierdie vraestel.
2. Skryf jou naam en ID-nommer op die voorblad van die vraestel.
3. Nie-programmeerbare sakrekenaars mag gebruik word, tensy anders vermeld by 'n spesifieke vraag.
4. Tensy anders gespesifiseer, moet alle antwoorde, waar van toepassing, korrek tot twee desimale syfers afgerond word.
5. Die diagramme in die vraestel is nie noodwendig volgens skaal geteken nie.
6. Alle hoeke word in radiale gegee. Antwoorde moet in radiale gegee word waar van toepassing.
7. Hierdie vraestel bestaan uit 'n voorblad, 22 bladsye en 'n formuleblad.
8. Vraag 1 bestaan uit **15** meervoudige keusevrae. Beantwoord dit op die antwoordblad. Hierdie antwoordblad is aan die voorkant van die vraestel. **Moet nie hierdie antwoordblad losmaak nie.**
9. Toon alle noodsaaklike berekeninge duidelik aan by elke vraag. Die korrekte antwoord op sigself sal nie noodwendig tot volpunte lei nie.
10. Addisionele skyfspasie word aan die einde van die vraestel voorsien. Toon duidelik aan indien jy daarvan gebruik maak om 'n vraag te voltooi.
11. Skryf netjies en leesbaar.

VRAAG 1

[30 PUNTE]

- 1.1 Hoeveel terme sal die uitbreiding van $x^2(2x - 5)^7$ bevat?
(A) 8 (B) 7 (C) 9 (D) 6
- 1.2 Die magreeks in die uitbreiding van $\sqrt{16 - 4x}$ sal konvergeer indien:
(A) $|x| < \frac{1}{2}$ (B) $|x| > 2$ (C) $|x| < 2$ (D) $|x| < 4$
- 1.3 Indien $|1 - x| < 5$, dan is:
(A) $x < -6$ of $x > 4$ (B) $x < -4$ of $x > 6$
(C) $-6 < x < 4$ (D) $-4 < x < 6$
- 1.4 Vereenvoudig: $e^{2 \ln x}$
(A) $2x$ (B) x^2 (C) 2 (D) x
- 1.5 As $x - \sqrt{3} + 1$ 'n faktor van $f(x)$ is, watter een van die volgende sal dan ook 'n faktor van $f(x)$ wees?
(A) $x - 1 + \sqrt{3}$ (B) $x + 1 + \sqrt{3}$
(C) $x + 1 - \sqrt{3}$ (D) $x - 1 - \sqrt{3}$
- 1.6 Hoeveel wortels het die vergelyking $x^4 = 16$ in $\mathbb{C}[x]$?
(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 3
- 1.7 Die grafiek van die funksie $f(x) = 2b \cos(x) - \frac{\pi}{2}$ sny die x -as by $x = \dots$
(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$
- 1.8 Die funksie $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 2}{x - 3}$ se grafiek het 'n skuins asimptoot $y = -x + 1$.
Dan is $b = \dots$
(A) -1 (B) 1 (C) -2 (D) 4
- 1.9 As p 'n polinoom van graad $n, n > 0$ is, wat is die graad van $\int_0^x (p(t))^2 dt$?
(A) $n + 1$ (B) $n^2 + 1$ (C) $2n + 1$ (D) $2n - 1$

1.10 Indien $f(x) = \sin x$ en $f^n(x)$ die n^{de} afgeleide van f met betrekking tot x is, dan is die kleinste waarde van n waarvoor $f^n(x) = f(x)$

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

1.11 Die funksies f en g is beide differensieerbaar vir alle $x \in \mathbb{R}$. Dit word gegee dat $g(x) > 0$ vir alle x . Indien $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ en $h'(x) = f(x)g'(x)$, dan is $f(x) = \dots$

- (A) $\ln x$ (B) e^x (C) $\frac{1}{g(x)}$ (D) e

1.12 Gegee
$$\begin{cases} \frac{11-x}{2} + b(x) & x < 5 \\ \sqrt{x-1} & x \geq 5 \end{cases}$$

Die funksie $f(x)$ moet as volg gewysig word sodat dit kontinu sal wees by $x = 5$. 'n Moontlikheid vir $b(x)$ is:

- (A) $\sqrt{x-1} - \frac{x-11}{2}$ (B) $\sqrt{x-1} + \frac{x-11}{2}$
 (C) $-3x + \sqrt{6}$ (D) $\sqrt{6}x - 3$

1.13 Indien n 'n positiewe heelgetal is, dan sal $\int_0^1 x^n dx = \int_0^1 (1-x)^n dx$ vir

- (A) alle n (B) alle ewe n
 (C) alle onewe n (D) geen n

1.14 Die oppervlakte tussen die grafiek $y = \frac{4}{x}$, die x -as en die lyne $x = m$ en $x = 2m$ met $m > 0$ sal altyd

- (A) afneem soos wat m toeneem (B) toeneem soos wat m toeneem
 (C) onafhanklik wees van m (D) toeneem as $m < \frac{1}{2}$, andersins afneem

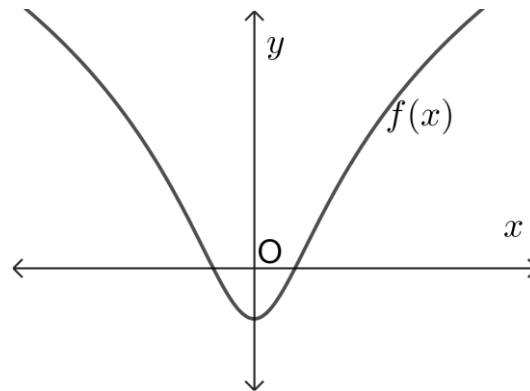
1.15 Die funksies $f(x)$ en $g(x)$ is differensieerbaar vir alle waardes van x . Die funksie g is die **inverse** van f met $g(-2) = 5$ en $f'(5) = \frac{1}{2}$. Dan sal $g'(-2) =$

- (A) 2 (B) -2 (C) $\frac{1}{5}$ (D) $-\frac{1}{5}$

VRAAG 2**[16 PUNTE]**

2.1 Los op vir x : $2 \ln(x^2 + 1) - 1 = 0$. Gee die antwoord(e) korrek tot **EEN** desimale syfer. (4)

2.2 Die skets hier onder toon die grafiek van $f(x) = 2 \ln(x^2 + 1) - 1$.



(a) Bereken die y -afsnit van f en toon dit aan op die skets. (2)

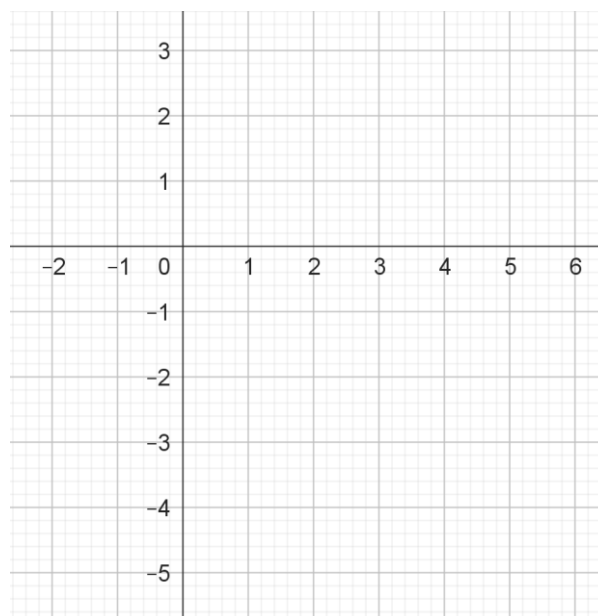
(b) Toon jou antwoord(e), bepaal in vraag 2.1, aan op die skets hierbo. (1)

(c) Die definisieversameling van f word nou beperk tot $x \leq 0$.

Bepaal die vergelyking van f^{-1} , die inverse van hierdie beperkte funksie. (4)

(d) Gee die x - en y - afsnit(te) van f^{-1} . (2)

(e) Skets die grafiek van f^{-1} op die asstelsel hieronder gegee. Gebruik jou antwoorde bepaal in Vraag 2.2 (d) en toon hierdie afsnitte met die asse duidelik op die skets aan. (3)

**VRAAG 3****[18 PUNTE]**

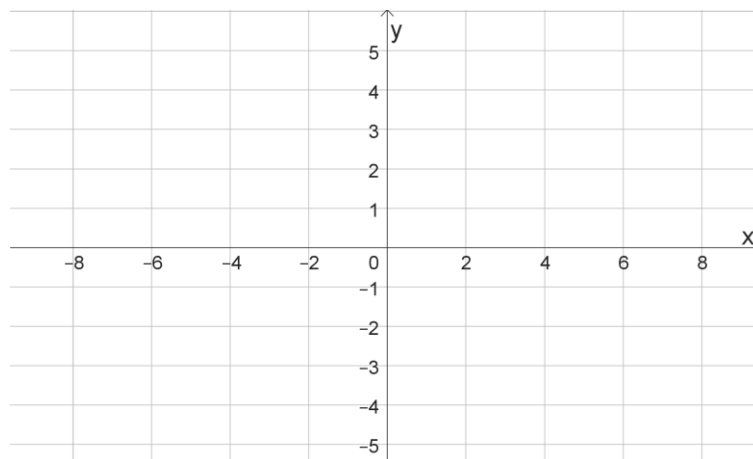
3.1 Bepaal die waarde van $\frac{(-1-i)^4}{-\sqrt{3}+i}$. Doen die berekening in poolvorm en gebruik π en wortelvorm indien nodig. Laat die antwoord in poolvorm. (6)

3.2 Los op vir x : $x^3 = -1$. Doen die bewerkings in poolvorm. Gee **al** die antwoorde in **reghoekvorm**. (7)

- 3.3 Gegee dat $x - i$ 'n faktor van $P(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6$ is. Faktoriseer $P(x)$ volledig in die komplekse getalle stelsel. (5)

VRAAG 4**[17 PUNTE]**

- 4.1 Gegee $g(x) = |x - 2| - 4$
- (a) Skryf die knakpunt van g neer. (1)
- (b) Bepaal alle afsnitte van g met die asse. (4)
- (c) Maak vervolgens 'n sketsgrafiek van $y = |g(x)|$. Toon die afsnitte met die asse en die knakpunt(e) duidelik aan. (4)



- 4.2 Bepaal of die volgende stelsel vergelykings 'n unieke oplossing het. **Dit is nie nodig om die stelsel op te los indien dit 'n unieke oplossing het nie.** Toon duidelik die matriks aan wat gebruik word met Cramer se metode.

$$\begin{array}{rcl} x & +3y & +2z = 16 \\ x & -y & -z = -10 \\ 3x & +5y & +z = 22 \end{array}$$

(3)

- 4.3 Gebruik die binomiaalstelling en bepaal die konstante in die uitbreiding van:

$$\left(2x - \frac{5}{4x^2}\right)^9$$

(5)

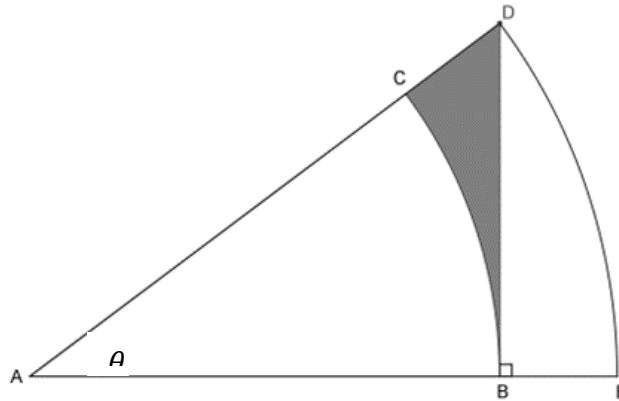
VRAAG 5**[23 PUNTE]**

- 5.1 Gegee 'n driehoek ABC , in 'n 3-dimensionele ruimte, met $A = (-1; 0; 1)$, $B = (-2; 4; -1)$ en $C = (1; 2; 0)$.
- (a) Skryf die vektore AC en BC neer. (2)
- (b) Bepaal die waarde van \widehat{ACB} deur van vektoralgebra gebruik te maak. (5)
- 5.2 Indien \vec{u} en \vec{v} algebraïese vektore is en a is 'n skalaar (getal), geld die identiteit $a(\vec{u} \times \vec{v}) = a\vec{u} \times \vec{v}$. (\times verteenwoordig die kruisproduk). Gegee vektore $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ en $\vec{v} = -\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$. Toon aan dat die identiteit geld deur die waarde van $(3\vec{u}) \times \vec{v}$ te bepaal, indien dit verder gegee word dat: $3(\vec{u} \times \vec{v}) = (-48; -15; 27)$. (4)

5.3 Gegee $y = 4 \text{ bgtan}(x + 1) + \pi$.

Teken 'n sketsgrafiek van die funksie en toon die afsnitte met die asook die asimptote van die funksie duidelik op die sketsgrafiek aan. Laat afsnitte in terme van π waar nodig. (6)

5.4 Die skets hieronder toon twee sirkel-sektore, ABC en AED, met dieselfde middelpunt, A. Die hoek tussen die radiusse by A is θ .
 $AE = 20$, $AB = 10\sqrt{3}$ en $DB \perp ABE$.



(a) Toon aan dat $\theta = \frac{\pi}{6}$ rad. (2)

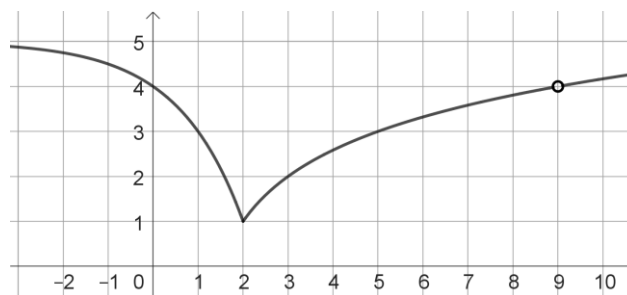
(b) Bepaal a en b indien die oppervlakte van die gearseerde gedeelte $CBD = a + b\pi$.
 (Gee a en b in die eenvoudigste wortelvorm waar van toepassing.) (4)

VRAAG 6

[18 PUNTE]

6.1 Die skets hieronder toon die grafiek van

$$f(x) = \begin{cases} -2^x + 5 & \text{as } x \leq 2 \\ \log_2(x-1) + 1 & \text{as } x > 2, \quad x \neq 9 \end{cases}$$



(a) Gee, met rede(s), die punt(e) waar f diskontinu is.
 Gee ook die tipe(s) diskontinuiteit. (3)

(b) Gebruik die skets en gee die punt(e) waar f nie differensieerbaar is nie. (2)

(c) Motiveer jou antwoorde van Vraag.6.1 (b) volledig algebraïes. (5)

6.2 Bewys die meetkundige reeks formule,

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \text{ vir all } n \in \mathbb{N}$$

deur van wiskundige induksie gebruik te maak. (8)

VRAAG 7**[20 PUNTE]**

7.1 Bepaal die afgeleide van die volgende soos gevra:

(a) Bepaal $\frac{d}{dx}[e^{x^2+\cos x}]$ (3)

(b) Bepaal $g'(x)$ indien $g(x) = \ln(x^2 - 10x + 25)$. Vereenvoudig jou antwoord. (3)

7.2 Gebruik implisiete differensiasie en bepaal die vergelyking van die raaklyn aan $y^3 - xy = y + x^2$ by die punt $(1; -1)$. (6)7.3 Beskou die funksie $f(x) = x^2 - \sqrt{4+x}$, $x > -4$. Hierdie funksie is kontinu oor die gegewe interval.

(a) Toon aan dat die funksie 'n nulpunt sal hê in die interval $x \in [1; 2]$. (2)

(b) Gebruik Newton-Rhapon metode en bepaal hierdie nulpunt.

- Gebruik $a_0 = 2$ as eerste benadering gebruik.
- Toon die formule waarmee jy werk.
- Skryf die tweede benadering (a_1) tot 3 desimale syfers neer.
- Gee die antwoord afgerond tot 5 desimale syfers. (6)

VRAAG 8**[19 PUNTE]**

8.1 Gebruik 'n Riemannsom en bepaal die waarde van $\int_0^3 (-x^2 + 6x) dx$ (9)

8.2 Gegee die **afgeleide** van 'n funksie f , $f'(x) = 2(x+1)^2(2x-1) = 4x^3 + 6x^2 - 2$.

(a) Die funksie f gaan deur die punt $(0; -1)$. Bepaal die vergelyking van f . (3)

(b) Bepaal x as $f'(x) = 0$ (1)

(c) Bepaal x as $f''(x) = 0$ (2)

(d) Die grafiek van f het 'n stasionêre punt wat nie 'n buigpunt is nie. Gee die x -waarde van hierdie punt. (1)(e) Die grafiek van f het 'n stasionêre punt wat ook 'n buigpunt is. Gee die x -waarde van hierdie punt en toon aan dat dit wel 'n buigpunt is. (3)**VRAAG 9****[19 PUNTE]**

Bepaal die volgende integrale:

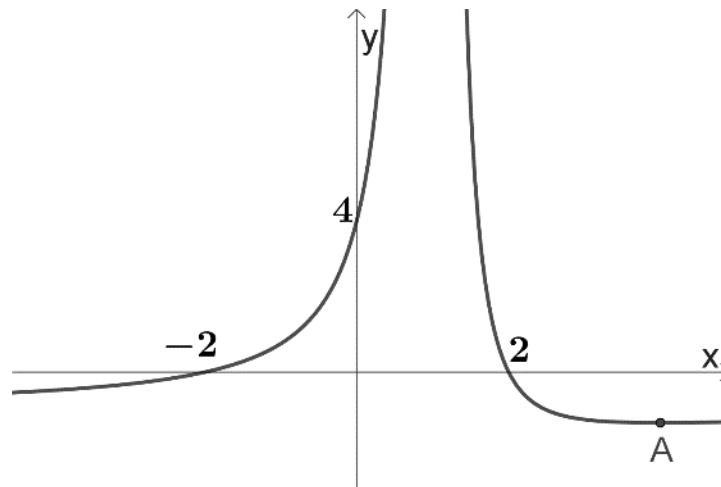
9.1 $\int (\sec^2(4x+1) + \operatorname{cosec} 3x \cot 3x + \pi) dx$ (5)

9.2 $\int \frac{8x^2-x-2}{(4x^2+1)(x+4)} dx$ deur van partiële breuke gebruik te maak. (8)

9.3 $\int (x \cdot \cos^2(x)) dx$, gebruik faktor (stuksgewyse) integrasie. (6)

VRAAG 10**[20 PUNTE]**

10.1 Die skets hieronder toon die grafiek van $f(x) = \frac{4-x^2}{(x-1)^2}$.



Bereken die volgende en toon dit op die skets indien gevra:

- Die grafiek het 'n minimum draaipunt by A. Bepaal die koördinate van A. (5)
 - Die grafiek sny die horisontale asimptoot, $y = -1$. Bepaal die x -waarde van hierdie snypunt. (3)
 - Skryf die vergelyking(s) van enige ander asimptote van f neer. (1)
 - Doen die volgende op die skets hierbo:
Trek die asimptote en toon die waarde van die punt bereken in vraag 10.1 (b) met 'n B. (2)
 - Skryf slegs **die vergelyking** neer wat gebruik sal word om die volume van die omwentelingsliggaam wat gevorm word, indien f om die x -as met $x \in [2; 4]$ roteer te bereken. (Jy hoef nie die volume te bereken nie.) (2)
- 10.2 Die oppervlak tussen die grafiek $\frac{a+\ln x}{x}$, die x -as en die lyne $x = 1$ en $x = e$ is gelyk aan 3,5. Bepaal die waarde(s) van a . (7)