

α -WISKUNDE

Junie 2025

Tyd: 3 uur

Graad 12

Totaal: 200 punte

Instruksies en inligting

Lees die volgende instruksies aandagtig deur voordat jy die vraestel beantwoord:

1. Hierdie vraestel bestaan uit sewe bladsye, 'n antwoordblad van drie bladsye en 'n formuleblad van drie bladsye.
2. Beantwoord AL twaalf vrae.
3. Nommer die antwoorde soos die vrae genommer is.
4. Nie-programmeerbare sakrekenaars mag gebruik word, tensy anders vermeld by 'n vraag.
5. Tensy anders gespesifiseer, moet alle antwoorde, waar van toepassing, korrek tot **twee desimale syfers** afgerond word.
6. **Dui alle noodsaaklike berekeninge**, diagramme, grafieke ensovoorts wat jy gebruik het om jou antwoorde te bepaal, duidelik aan.
7. Volpunte sal nie noodwendig aan slegs antwoorde toegeken word nie.
8. Die diagramme in die vraestel is nie noodwendig volgens skaal geteken nie.
9. Alle hoeke word in radiale gegee. Antwoorde moet in radiale gegee word indien nodig.
10. Skryf netjies en leesbaar.

1.7 Die kwosiënt van $2\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ en $4\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ is

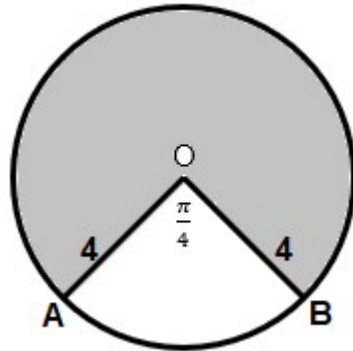
(A) $8\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

(B) $2\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$

(C) $6\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

(D) $\frac{1}{2}\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$

1.8 In die onderstaande skets is O die middelpunt van 'n sirkel met radius van 4cm. $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{4}$ radiale.



Bepaal die oppervlakte van die gearseerde gedeelte.

(A) $2\pi \text{ cm}^2$

(B) $\frac{\pi}{2} \text{ cm}^2$

(C) $14\pi \text{ cm}^2$

(D) $\frac{7\pi}{2} \text{ cm}^2$

1.9 Indien $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + x + 1$, watter van die volgende, volgens die rasionale wortelstelling, is moontlike nulpunte van f ?

(A) ± 1

(B) ± 2

(C) ± 1 en ± 2

(D) ± 1 en $\pm \frac{1}{2}$

1.10 Indien $x = -1 - 2i$ 'n wortel is van die vergelyking $p(x) = 0$, watter een van die volgende is óók 'n wortel van $p(x) = 0$?

(A) $x = 1 + 2i$

(B) $x = -1 + 2i$

(C) $x = 1 - 2i$

(D) Nie een van bogenoemde nie.

1.11 Bepaal die volgende integraal: $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$

(A) $\text{bgtan}(e^x) + k$

(B) $e^{2x} + k$

(C) $\ln(1 + e^{2x}) + k$

(D) $\frac{e^x}{1+e^{2x}} + k$

1.12 Indien vektore p en q ewewydig is, watter een van die volgende sal geld?

(A) $p \times q = 1$

(B) $p \times q = -1$

(C) $p \times q = 0$

(D) $p \times q = \frac{1}{2}$

1.13 Die asimptote van $y = 3bgtan(x) - \frac{\pi}{2}$ is

(A) $y = \frac{\pi}{2}$ en $y = -\frac{\pi}{2}$

(B) $y = -\pi$ en $y = 0$

(C) $y = \pi$ en $y = -2\pi$

(D) $y = 0$ en $y = \pi$

1.14 Hoeveel terme sal die uitbreiding van $x^4(-1 + x)^9$ bevat?

(A) 8

(B) 10

(C) 9

(D) 11

1.15 Die asimptote van $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1}$ is

(A) $y = \frac{1}{2}, x = \pm 1$

(B) $y = 2, x = \pm 1$

(C) $y = \frac{1}{2}$ en $x = -1$

(D) $y = 2$ en $x = -1$

Vraag 2

[16 punte]

2.1 Gebruik Cramer se reël en bepaal die waarde van y indien

$$3x + 5y = 7 \text{ en } -x = -1 + y \quad (5)$$

2.2 Los op vir x :

(a) $|2x - 1| = x^2 \quad (7)$

(b) $-|2x + 3| \leq -7 \quad (4)$

Vraag 3

[15 punte]

3.1 Gegee: $f(x) = 4x^4 - 11x^2 - 3$, met $x = \sqrt{3}$ 'n nulpunt van die funksie f .
Faktoriseer f volledig in die komplekse getalgestelsel. (5)

3.2 Gegee: $a = -2 + 2i$ en $b = -8i$.

(a) Skryf a en b in poolvorm. (4)

(b) Gebruik De Moivre se stelling en bepaal a^2b . Doen alle bewerkings in poolvorm en gee die antwoord in reghoekige vorm. (6)

Vraag 4**[12 punte]**

'n Aansteklike virus versprei in 'n dorpie met 'n populasie van 10 000. Na t dae word die aantal persone wat met die virus besmet is, gegee deur $P(t) = \frac{10\,000}{5+1245e^{-0,97t}}$

- 4.1 Hoeveel mense was oorspronklik met die virus besmet? (2)
- 4.2 Na hoeveel dae sal 1000 mense met die virus besmet wees?
Gee jou antwoord as 'n heelgetal. (4)
- 4.3 Wat is die maksimum aantal mense wat die virus gaan opdoen? (1)
- 4.4 Differensieer die funksie. (Dit is nie nodig om jou antwoord te vereenvoudig nie.) (3)
- 4.5 Beskryf in woorde wat die afgeleide funksie, $P'(t)$ beskryf. (2)

Vraag 5**[18 punte]**

- 5.1 Bepaal die derde en die vierde terme in die uitbreiding van $\frac{1}{(1-x)^3}$.
Vereenvoudig jou antwoord. (5)
- 5.2 Bepaal die twaalfde term in die uitbreiding van $\left(\frac{1}{x^2} + x\right)^{15}$. (4)
- 5.3 Gebruik wiskundige induksie en toon aan dat die volgende bewering waar is vir alle $n \in \mathbb{N}$: $1 - 1 - 3 + \dots + (3 - 2n) = 2n - n^2$ (9)

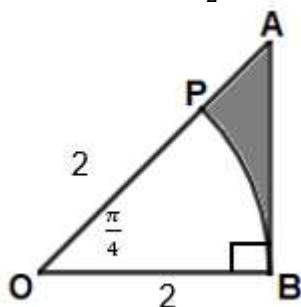
Vraag 6**[12 punte]**

- 6.1 Gegee: Vektor $\mathbf{u} = (1; 0; 2)$
- (a) Bepaal die rigtingskosinusse van \mathbf{u} . (2)
- (b) Vervolgens, bereken die hoek wat vektor \mathbf{u} met die z -as maak. (2)
- 6.2 Die punte $P = (2; -1; -1)$, $S = (-1; 0; 2)$ en $T = (0; 5; 1)$ word gegee.
- (a) Skryf die vektore PS en ST neer. (2)
- (b) Bepaal of PS en ST loodreg op mekaar is. Toon al jou bewerkings. (4)
- (c) Die vektor $M = -16i - 16k$ is loodreg op PS en ST . Bepaal die grootte van die oppervlakte van die parallellogram wat gevorm word tussen PS en ST .
Gee jou antwoord in wortelvorm. (2)

Vraag 7**[15 punte]**

7.1 Die skets hieronder toon sektor OPB met middelpunt O en 'n radius van 2cm.

$$\widehat{AOB} = \frac{\pi}{4} \text{ radiale en } \widehat{ABO} = \frac{\pi}{2}.$$



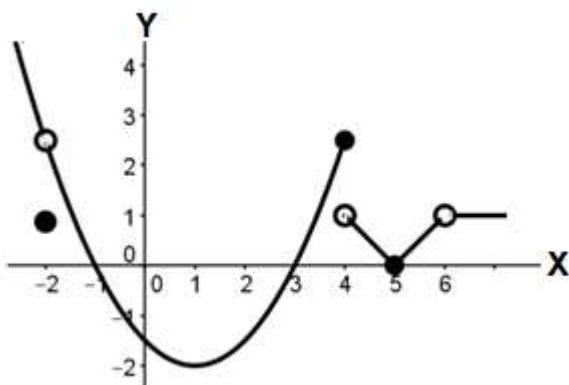
- (a) Motiveer waarom $AB = 2\text{cm}$. (2)
- (b) Bepaal die booglengte PB. (2)
- (c) Bepaal die omtrek van die gearseerde gedeelte ABP.
Gee jou (finale) antwoord as 'n desimale getal, afgerond tot een desimale plek. (4)

7.2 Gebruik die antwoordblad en skets die grafiek van $y = b\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{2\pi}{3}$.

Toon duidelik die afsnitte met die asse, asook die begin- en eindpunte van die grafiek aan. (7)

Vraag 8**[20 punte]**

8.1 Die grafiek van $y = f(x)$ is hieronder gegee:



Vir watter waarde(s) van x sal

- (a) die funksie f 'n verwyderbare diskontinuiteit hê. Motiveer jou antwoord. (6)
- (b) die funksie f 'n sprongdiskontinuiteit hê. Motiveer jou antwoord. (6)

8.2 Sê in elk van die volgende gevalle of die bewering waar of onwaar is:

- (a) 'n Kontinue funksie sal ook differensieerbaar wees.
- (b) Indien 'n funksie $y = f(x)$ differensieerbaar in 'n punt $x = a$ is, sal $\lim_{x \rightarrow a^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$
- (c) Die x -koördinaat van die stasionêre punt van 'n funksie f , is ook die afgeleide funksie se x -afsnit.
- (d) Indien $f'(x) < 0$ in die interval $(a; b)$, sal die funksie f styg in die interval $(a; b)$.
- (e) Die buigpunt van die funksie f , kan gebruik word om die x -koördinaat van die stasionêre punt van die afgeleide funksie te bepaal.
- (f) Indien die funksie f konkaf af buig in die interval $(a; b)$, sal $f''(x) > 0$ in die interval $(a; b)$.
- (g) 'n Funksie sal nooit 'n horisontale of skuins asimptoot sny nie. (14)

Vraag 9

[14 punte]

9.1 Gebruik die Newton-Rhapson-metode en bepaal die x -afsnit van $f(x) = \sqrt[5]{x^3} - x + 1$.

- Gebruik $x_0 = 3$ as eerste benadering.
- Toon duidelik die formule waarmee jy werk.
- Skryf die tweede benadering (x_1) tot ses (6) desimale syfers neer.
- Skryf die finale antwoord tot vyf (5) desimale plekke neer. (5)

9.2 Gebruik implisiete differensiasie en bepaal die afgeleide van $2^{7y} = \cos^2(7x) + \pi y$ (9)

Vraag 10

[17 punte]

Gegee: $f(x) = \frac{x^3+4}{x^2} = x + \frac{4}{x^2}$

- 10.1 Bepaal die asimptote van die funksie f en benoem die tipe asimptote. (4)
- 10.2 Bepaal die koördinate van die stasionêre punt van die funksie f . (5)
- 10.3 Verduidelik hóé die tweede afgeleide funksie gebruik kan word om te bepaal dat die stasionêre punt, bereken in 10.2, 'n minimum is. (Dit is nie nodig om die berekening te doen nie.) (2)
- 10.4 Bepaal die x -afsnit van die funksie f . (1)
- 10.5 Dit is gegee dat die funksie f styg vir $x < 0$. Gebruik die antwoordblad en teken die grafiek van f . Toon duidelik al bogenoemde waardes op jou skets aan. (5)

Vraag 11**[11 punte]**

11.1 Bepaal die koördinate van die buigpunt van $f(x) = \sqrt[5]{x^{11}} + e$. Gee jou antwoord i.t.v. e . (6)

11.2 Motiveer waarom jou antwoord in 11.1 'n buigpunt is. (5)

Vraag 12**[20 punte]**

12.1 Bepaal die afgeleide van $f(x) = \left[\frac{1}{\pi x} - \operatorname{cosec} x \right] \left[\ln(5x) + b \operatorname{gcos} \left(-\frac{x}{2} \right) \right]$ (6)

12.2 Bepaal die volgende integrale:

(a) $\int (2^{4x} + 2x^4) dx$ (4)

(b) $\int \left[\frac{2}{7x-1} - (7x-1)^2 \right] dx$ (5)

12.3 Bepaal die volume van die omwentelingsliggaam wat gevorm word wanneer die oppervlakte onder $y = \sqrt{x^2 - p}$ om die x -as roteer, tussen $x = 2$ en $x = 4$. Gee jou antwoord i.t.v p . (5)

Totaal: 200