

α -WISKUNDE

Alpha-Wiskunde EINDEKSAMENVRAESTEL 2025

20 Oktober 2025

Graad 12

Tyd: 3 uur

Totaal: 200 punte

INSTRUKSIES EN INLIGTING

Lees die volgende instruksies aandagtig deur voordat jy die vraestel beantwoord:

1. Beantwoord AL 10 vroe op hierdie vraestel.
2. Skryf jou naam en ID-nommer op die voorblad van die vraestel.
3. Nie-programmeerbare sakrekenaars mag gebruik word, tensy anders vermeld by 'n spesifieke vraag.
4. Tensy anders gespesifiseer, moet alle antwoorde, waar van toepassing, korrek tot twee desimale syfers afgerond word.
5. Die diagramme in die vraestel is nie noodwendig volgens skaal geteken nie.
6. Alle hoeke word in radiale gegee. Antwoorde moet, waar van toepassing, in radiale gegee word.
7. Hierdie vraestel bestaan uit 'n voorblad, 22 bladsye en 'n formuleblad.
8. Vraag 1 bestaan uit 15 meervoudigekeusevrae. Beantwoord dit op die antwoordblad. Hierdie antwoordblad is aan die voorkant van die vraestel. **Moet nie hierdie antwoordblad losmaak nie.**
9. Toon alle noodsaaklike berekeninge duidelik aan by elke vraag. Die korrekte antwoord op sigself sal nie noodwendig tot volpunte lei nie.
10. Addisionele skryfspasie word aan die einde van die vraestel voorsien. Toon duidelik aan indien jy daarvan gebruik maak om 'n vraag te voltooi.
11. Skryf netjies en leesbaar.

VRAAG 1**[30 PUNTE]**

- Beantwoord hierdie vraag **op die antwoordblad**, wat voor aangeheg is, deur telkens 'n X (kruisie) op A, B, C of D te maak. Hierdie vrae tel 2 punte elk.
- Moet asb. **NIE** hierdie bladsy van die vraestel losmaak nie.

1.1 $\log_5 125 - \log_5 25 =$

- (A) 3
- (B) 1
- (C) $\log_5 100$
- (D) $\log_5 5^{\frac{3}{2}}$

1.2 Watter een van die volgende vektore is 'n eenheidsvektor:

- (A) $(1; 1; 1)$
- (B) $(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{3}{4})$
- (C) $\frac{1}{3}i + \frac{2}{3}j - \frac{2}{3}k$
- (D) $i - j + k$

1.3 Indien $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, is die funksie f by die punt $x = a$, **altyd**:

- (A) kontinu
- (B) differensieerbaar
- (C) integreerbaar
- (D) nie een van bostaande nie

1.4 Die grafiek van $y = -|x - 2| + 3$ is dalend vir $x \in$

- (A) $(-\infty; 3]$
- (B) $(-\infty; 2]$
- (C) $[2; \infty)$
- (D) $[-2; \infty)$

1.5 Die volgende stelling is altyd waar:

- (A) Polinome van 'n ewe graad, sal altyd minstens een reële nulpunt van die vorm $a + b\sqrt{c}$ hê met $c \neq 0$.
- (B) As 'n polinoom met heelgetal koëffisiënte in reële faktore kan ontbind, sal die polinoom ook in heelgetal faktore ontbind.
- (C) As 'n polinoom met heelgetal koëffisiënte in rasionale faktore kan ontbind, sal die polinoom ook in heelgetal faktore ontbind.
- (D) Polinome met 'n onewe graad, het altyd minstens 2 komplekse nulpunte van die vorm $a + ib$ met $b \neq 0$.

- 1.6 Die derde term in die magreeks $\sqrt[3]{1+2x}$ is
- (A) $-\frac{4}{9}x^2$
 - (B) $4x^2$
 - (C) $-4x^2$
 - (D) $\frac{4}{9}x^2$
- 1.7 Bepaal die konstante term in die uitbreiding van $\left(-\frac{x}{3} + \frac{2}{x^2}\right)^9$
- (A) $\frac{-1}{3^6} \times 2^3$
 - (B) $\binom{9}{3} \times \frac{1}{3^6} \times 2^3$
 - (C) $-\binom{9}{6} \times \frac{1}{3^3} \times 2^6$
 - (D) $\frac{9!}{3!} \times \frac{1}{3^6} \times 2^3$
- 1.8 As $y = 2x - 8$, vir watter waarde van x sal die produk xy 'n minimum waarde hê?
- (A) 4
 - (B) -8
 - (C) -2
 - (D) 2
- 1.9 'n Polinoom $P(x)$ het 'n relatiewe maksimum by $(-5; 5)$, 'n relatiewe minimum by $(1; 2)$ en 'n relatiewe maksimum by $(5; 8)$. Die polinoom het geen ander stasionêre punte nie. Wat is die maksimum aantal reële nulpunte wat $P(x)$ kan hê?
- (A) Een
 - (B) Vier
 - (C) Drie
 - (D) Twee
- 1.10 Watter van die volgende uitdrukkings is die resultaat wanneer die grafiek van $f(x) = \ln(x+2)$ drie eenhede links en vier eenhede op transleer?
- (A) $\ln(x-1) + 4$
 - (B) $\ln(x+2) + 4$
 - (C) $\ln(x+5) + 4$
 - (D) $\ln(x+5) - 4$

1.11 Bepaal die definisieversameling van die funksie $f(x) = \sqrt{2-x} \times \ln 2x$.

- (A) $[2; \infty)$
- (B) $(-\infty; 2]$
- (C) $(0; \infty)$
- (D) $(0; 2]$

1.12 Gegee $f(x) = \frac{5}{2}x^2 - e^x$, dan is die punt $x = \ln 5$

- (A) 'n stasionêre punt van f .
- (B) 'n punt van infleksie van f .
- (C) 'n nulpunt van f .
- (D) 'n ongedefinieerde punt van f .

1.13 As $\frac{dy}{dx} = y \cdot \sec^2 x$, dan is $y =$

- (A) $e^{\tan x}$
- (B) $e^{\tan x} \cdot \tan x$
- (C) $\tan x$
- (D) $\tan x + e^x$

1.14 Watter van die volgende is anti-afgeleides (integrale) van $f(x) = \sin x \cos x$?

I $\frac{\sin^2 x}{2}$ II $\frac{\cos^2 x}{2}$ III $-\frac{\cos(2x)}{4}$

- (A) Slegs I.
- (B) Al drie.
- (C) Slegs I en II.
- (D) Slegs I en III.

1.15 Die grafiek van $y = x^3 + ax^2 + bx - 4$ het 'n buigpunt (punt van infleksie) by $(1; -6)$.
Wat is die waarde van b ?

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 3
- (D) Dit kan nie met die gegewe inligting bepaal word nie.

Beantwoord die volgende vrae **op die vraestel** op die lyne wat onderaan elke vraag voorsien is. Toon duidelik aan indien jy die addisionele skryfspasie aan die einde van die vraestel gebruik om 'n vraag te voltooi.

VRAAG 2**[17 PUNTE]**

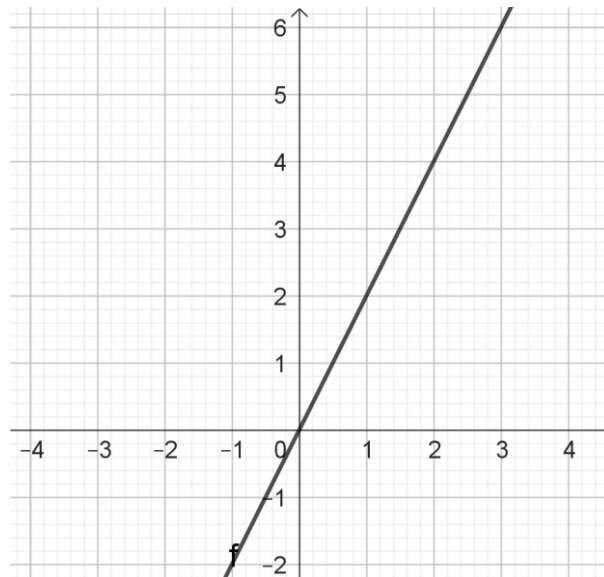
- 2.1 Die halfleeftyd van radium-226 is 1590 jaar. Die formule vir die massa, m (in milligram) van radium-226 wat oorbly na t jaar word gegee deur:

$$m(t) = 100e^{-\frac{t(\ln 2)}{1590}}$$

- (a) Bepaal die massa van die radium-226 na 100 jaar tot die naaste milligram (mg). (2)
- (b) Na hoeveel jaar sal die massa afgeneem het na 30 mg? (5)

- 2.2 Gegee $f(x) = (x + 1) \ln(x + 1)$ en $g(x) = e^x - 1$.

- (a) Toon aan dat $(f \circ g)(x) = xe^x$. (2)
- (b) Los vervolgens op vir x indien $(f \circ g)(x) = 2x$. (4)
- (c) Die grafiek van die funksie van $(f \circ g)(x) = xe^x$ het 'n minimum draaipunt by A $(-1; -0,4)$ en 'n horisontale asimptoot by $y = 0$. Die grafiek is stygend vir $x > -1$. Teken die grafiek van hierdie funksie op die gegewe assstelsel hieronder, waarop die grafiek van $y = 2x$ geskets is. Toon die draaipunt A en die punt(e) bereken in VRAAG 2.2 (b) met 'n B (en C) op jou skets. (4)

**VRAAG 3****[16 PUNTE]**

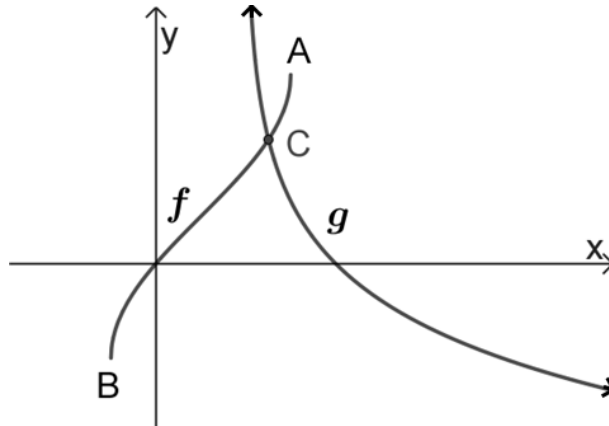
- 3.1 Gegee $z = \frac{4(-1+\sqrt{3}i)^n}{2^n(-\sqrt{3}-i)^2}$. Vereenvoudig hierdie uitdrukking met behulp van de

Moivre se stelling en gee die finale antwoord in sy **eenvoudigste poolvorm** ($r \text{cis} \theta$) in terme van π en n . (6)

- 3.2 Gegee $z^3 = -4 + 4i$. Bepaal al die moontlike waardes van z met behulp van de Moivre se stelling. Laat die finale antwoorde in **poolvorm**. (5)
- 3.3 In die vergelyking $2x^3 + ax^2 + 32x - 17 = 0$ is $x = -1 + 4i$ 'n wortel. Bepaal die waarde van a . (5)

VRAAG 4**[19 PUNTE]**

- 4.1 Die grafiek hieronder toon die funksie van $f(x) = b \sin\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{6}$ en $g(x) = -\ln(x - 1)$.



- (a) Gee die koördinate van A en B, die eindpunte van f . (4)
- (b) Gee die definisieversameling van f^{-1} , die inverse funksie van f . (1)
- (c) Die grafiek van f en g sny mekaar by C. Gebruik Newton se metode en bepaal die x -waarde van C korrek tot 4 desimale syfers. (Begin by $x = 1,2$ en toon al jou stappe.) (5)
- 4.2 Bepaal die waarde(s) van x indien $|x + 2| = -\frac{x}{4} + 4$. (5)
- 4.3 Die volgende stelsel vergelykings word gegee:

$$2x + y + z = 0$$

$$x - 2y - z = t$$

$$4x + 3y + 2z = 1$$

Dit word verder gegee dat: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3$ en $z = -5$.

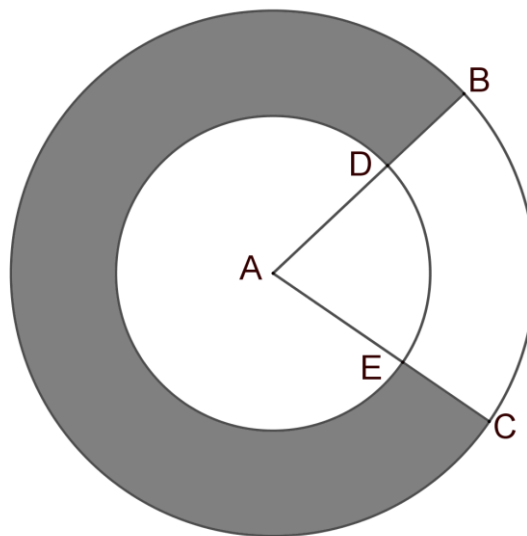
Gebruik Cramer se reël en bepaal die waarde van t . (Toon die matrikse wat jy gebruik, duidelik aan.) (4)

VRAAG 5**[20 Punte]**

5.1 Gegee: vektore $A = (3; -1; 5)$ en $B = 2i - j - k$

- (a) Bepaal die afstand tussen A en B. Laat antwoord in wortelvorm indien moontlik. (2)
- (b) Bepaal die hoek tussen vektor A en die y -as. (3)
- (c) Bepaal die hoek tussen die twee vektore. (5)
- (d) Bepaal 'n vektor wat loodreg op A en B is. (4)

5.2 Die skets toon twee konsentriese sirkels met middelpunt A. $AD = 4$ is 'n radius van die kleiner sirkel en $AB = 6$ is 'n radius van die groter sirkel. ADB en AEC is reguit lyne. Die groot gebied DBCE is geskakeer (ingekleur).



- (a) Indien die oppervlakte van die geskakeerde gebied gelyk is aan 15π , bepaal \widehat{BAC} . (4)
- (b) Bepaal die omtrek van die geskakeerde gebied in terme van π . (2)

VRAAG 6**[20 PUNTE]**

6.1 Gegee:

$$f(x) = \begin{cases} -2 \cos x & \text{as } x \leq \frac{5\pi}{3} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2\pi} \left(x - \frac{2\pi}{3}\right)^2 & \text{as } x > \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

- (a) Bepaal algebraïes of f kontinuu is by $x = \frac{5\pi}{3}$. Indien f nie kontinuu is nie, gee die tipe diskontinuuïteit. (5)
- (b) Bepaal $\lim_{x \rightarrow \frac{5\pi}{3}^-} f'(x)$ en $\lim_{x \rightarrow \frac{5\pi}{3}^+} f'(x)$. (5)
- (c) Is f differensieerbaar by $x = \frac{5\pi}{3}$? Gee 'n rede vir jou antwoord. (2)

6.2 Gebruik wiskundige induksie om te bewys dat:

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2}{4} (n+1)^2$$

(8)

VRAAG 7**[23 PUNTE]**

7.1 Bepaal soos gevra die afgeleide van die volgende: (Antwoorde hoef nie vereenvoudig te word nie.)

(a) Bepaal $\frac{d}{dx} [2^{\operatorname{cosec} 3x}]$ (3)

(b) Bepaal $g'(x)$ indien $g(x) = e^{\tan x} (\sqrt[4]{5x^3})$ (5)

7.2 Gegee: $\cot 2y - y \ln x + x = 2$.

Die gradiënt van die raaklyn aan die kromme van die gegewe vergelyking by die punt $(1; \frac{\pi}{8})$ is $a + b\pi$. Gebruik implisiete differensiasie en bepaal a en b . (6)

7.3 Gebruik 'n Riemannsom en bepaal die waarde van $\int_2^4 (3x^2 - 6x) dx$. (9)

VRAAG 8**[17 PUNTE]**

Gegee: $f(x) = \frac{2x^2 - 18}{x^2 - 5x - 6}$

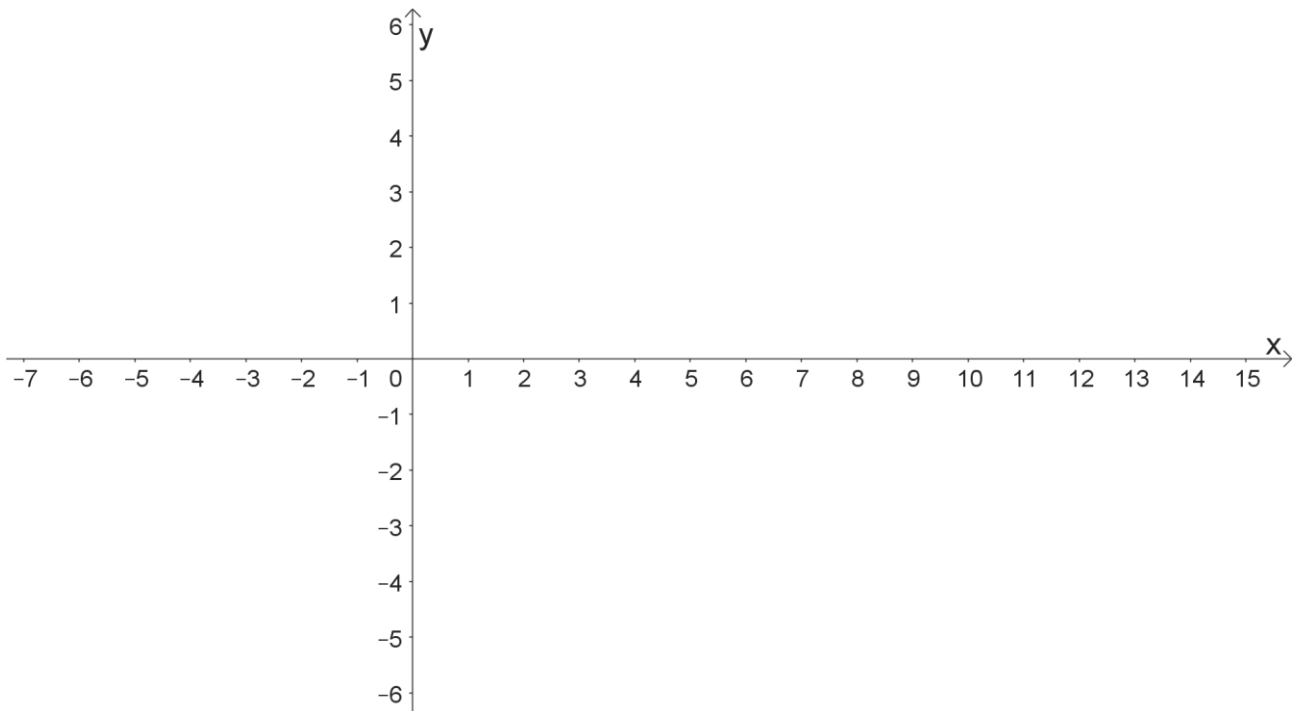
8.1 Bereken die x - en y -afsnitte van f . (3)

8.2 Bepaal alle asimptote van f . (3)

8.3 Gebruik differensiasie om aan te toon dat f geen stasionêre punte het nie. (4)

8.4 Die grafiek f sny die horisontale asimptoot een keer by B. Bereken die x -waarde van hierdie punt. (2)

8.5 Maak 'n sketsgrafiek van f . Toon duidelik die afsnitte met die asse, die asimptote en die punt bereken in VRAAG 8.4 met 'n D op die grafiek aan. (5)

**VRAAG 9****[21 PUNTE]**

Bepaal die volgende integrale:

$$9.1 \quad \int \left(\frac{8}{(4x-2)\ln 5} + 10 \right) dx. \quad (3)$$

$$9.2 \quad \int \frac{3x^2+3x+7}{(x^2+1)(x-2)} dx \text{ deur gebruik te maak van parsieële breuke.} \quad (8)$$

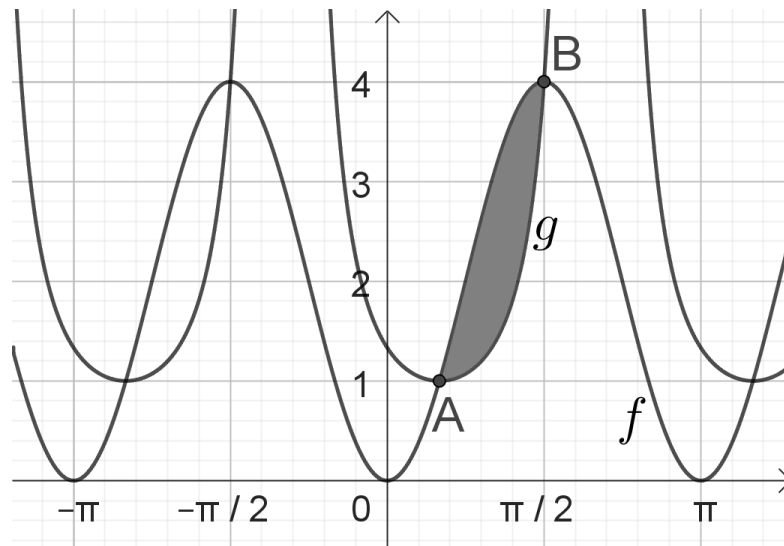
$$9.3 \quad \int x^2 \cdot e^x dx \text{ deur gebruik te maak van faktorintegrasie (stuksgewyse integrasie).} \quad (6)$$

$$9.4 \quad \int \left(\sin 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} \cos 2x \right) dx. \quad (4)$$

(Wenk: Gebruik die produkreël en die fundamentele stelling van calculus.)

VRAAG 10**[17 PUNTE]**

- 10.1 Die skets hieronder toon die grafieke van $f(x) = (2 \sin x)^2$ en $g(x) = \sec^2(x - \frac{\pi}{6})$. Die grafieke sny by $A(\frac{\pi}{6}; 1)$ en $B(\frac{\pi}{2}; 4)$. Die gebied tussen die twee grafieke tussen A en B is geskakeer.



- (a) Bepaal a, b en c indien die oppervlakte van hierdie gebied gelyk is aan $a\pi + b\sqrt{c}$. (Toon al die stappe wat jy gebruik.) (7)
- (b) Die geskakeerde gebied roteer om die x -as. Skryf **slegs** die vergelyking neer wat gebruik kan word om die volume van die omwentelingsliggaam wat gevorm word, te bereken. (3)
- 10.2 Bereken die waarde van a indien $\int_0^a \frac{1}{\sqrt{3+4x-4x^2}} dx = \frac{\pi}{6}$. (7)

TOTAAL: 200 PUNTE